

• Vector Normal y Binormal (\hat{N} y \hat{B})

$$\hat{N} = \frac{\frac{d\hat{T}(t)}{dt}}{\left\| \frac{d\hat{T}(t)}{dt} \right\|}$$

$$\text{con } \hat{T} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \left/ \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right\|$$

[Por ningún motivo hagan \rightarrow chequear con $\vec{r}(t) = (t^2, t, 1)$]

$$\hat{N} = \frac{\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \times \frac{d\vec{r}}{dt}}{\left\| \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right\|}, \text{ y } \hat{B} = \hat{T} \times \hat{N}$$

• Concepto de Masa y Centro de Masa

Densidad \Rightarrow Masa

Lineal, λ , $\left[\frac{\text{kg}}{\text{m}} \right]$ $M = \int \lambda dl$

Superficial, σ , $\left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^2} \right]$ $M = \iint \sigma dA$

Volumétrica, ρ , $\left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$ $M = \iiint \rho dV$

Centro de Masa (Caso lineal, equivalente los otros)

$$x_G = \frac{\int x \cdot f(x, y, z) dl}{M}, \quad y_G = \frac{\int y \cdot f(x, y, z) dl}{M}$$

$$\text{y } z_G = \frac{\int z \cdot f(x, y, z) dl}{M} \Rightarrow \text{CMasa} = (x_G, y_G, z_G)$$

con $f(x, y, z) = \text{densidad}$.

• Campo Conservativo

Se dice que $\vec{F}(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z))$ es conservativo, si \vec{F} admite un potencial. Es decir:

$$\vec{F} = -\nabla g$$

$$\vec{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

NOTA: Se ocupa mucho en Electromagnetismo, seaando el potencial de un campo eléctrico, $\vec{E} = -\nabla \phi$.

- P1) Considere aquella curva sobre la superficie del paraboloide $x^2 + y^2 = z$, que al ser descrita en coordenadas cilíndricas las variables $\rho > 0$ y $\theta \in [0, \infty[$ satisfacen la ecuación

$$\frac{d^2 \rho}{d\theta^2} = \rho \quad \text{con cond. iniciales} \quad \begin{cases} \rho(0) = 1 \\ \frac{d\rho(0)}{d\theta} = -1 \end{cases}$$

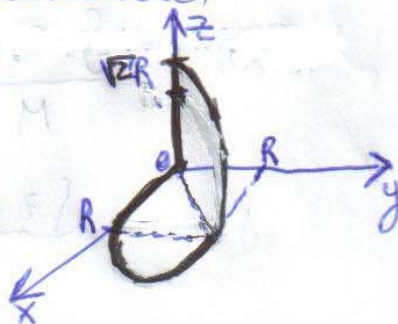
i) Obtenga una parametrización

ii) Dado el campo $\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} z(1+xz)e^{xz+y} \\ xze^{xz+y} \\ x(1+xz)e^{xz+y} \end{pmatrix}$

considere una partícula confinada a moverse a través de la curva. Calcule el trabajo para llevar la partícula de $z=1$ a z_0 con $0 \leq z_0 \leq 1$. ¿Y el trabajo para llevarla al origen?

- P2) Calcule el centro de gravedad de la siguiente curva, parametrizándola de manera conveniente, si la densidad de la curva es $\rho(x, y, z) = (x+y)^2 + z^2$.

Hint: Parametrice la curva según el trazo, reconociendo los 4 que se observan.



- P3) Demostrar la siguiente aseveración

Los vectores \hat{N} y \hat{T} son efectivamente ortogonales

Solución

P1 i) Como $x^2 + y^2 = z$, si tomamos coord. cilíndricas

$$\Rightarrow p^2 = z.$$

$$\text{Además, } \frac{d^2 p}{d\theta^2} - p = 0 \Leftrightarrow p''^2 - p = 0$$

$$\text{Resolvemos la EDO } \Rightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1$$

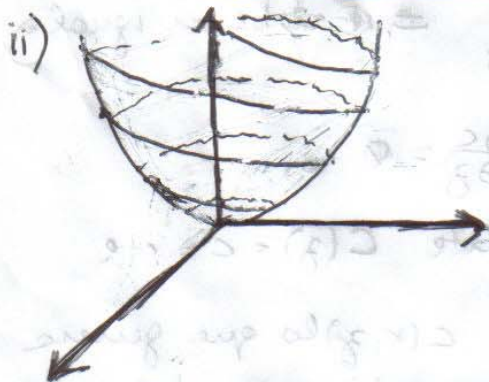
$$\text{La solución será } p = Ae^{\theta} + Be^{-\theta}$$

$$\text{Condiciones iniciales } \Rightarrow \begin{cases} A + B = 1 \\ A - B = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} A = 0 \\ B = 1 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow |p(\theta) = e^{-\theta}|$$

\Rightarrow La parametrización queda

$$|\vec{r}(\theta) = (e^{-\theta} \cos \theta, e^{-\theta} \sin \theta, e^{-2\theta})|$$



① Deseamos ver si \vec{F} es conservativo.
Es decir, si $\exists g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tq

$$\vec{F} = -\nabla g = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}, -\frac{\partial g}{\partial y}, -\frac{\partial g}{\partial z} \right)$$

pues de ser así, se tiene que

$$W = \int_{\alpha}^{\beta} \vec{F}(\vec{r}(\theta)) \cdot \frac{d\vec{r}}{d\theta} d\theta = g(\vec{r}(\beta)) - g(\vec{r}(\alpha))$$

(De aquí se deduce, que si una curva es cerrada, y actúa sobre ella un campo conservativo, el trabajo es 0)

A esto se le conoce como "Independencia de la trayectoria"
(lo importante son los puntos inicial y final,
no como llegamos de uno a otro)

Partamos por la componente en j de \vec{F} ...

(Buscamos g tq $\nabla g = -\vec{F}$)

$$-\frac{\partial g}{\partial y} = xz e^{xz+y} \Rightarrow -g(x,y,z) = xz e^{xz+y} + c(x,z)$$

Luego, tomando el g encontrado,

$$-\frac{\partial g}{\partial x} = z e^{xz+y} + xz^2 e^{xz+y} + \frac{\partial c(x,z)}{\partial x} = (*)$$

Esto debe ser igual a la componente en i de \vec{F} ...

$$\Rightarrow (*) = z e^{xz+y} + xz^2 e^{xz+y} \Rightarrow \frac{\partial c(x,z)}{\partial x} = 0$$

Entonces, $c(x,z) = c(z)$

por lo que $-g(x,y,z) = xz e^{xz+y} + c(z)$

Lo mismo, pero ahora para el término en k ,

$$-\frac{\partial g}{\partial z} = x e^{xz+y} + x^2 z e^{xz+y} + \frac{\partial c}{\partial z} \text{ que debe ser igual a}$$

$$\vec{F} \cdot \vec{k} = x(1+xz) e^{xz+y} \Rightarrow \frac{\partial c}{\partial z} = 0$$

Por esto, $c(z)$ es en realidad constante $c(z) = c = \text{cte}$

$\Rightarrow -g(x,y,z) = xz e^{xz+y} + c$ lo que genera una familia de potenciales que satisfacen el campo, por lo que podemos elegir $c=0$ y llegamos a

$$\boxed{g(x,y,z) = -xz e^{xz+y}}$$

② Hay que llevar la partícula de $z=1$ a $z_0 \in [0,1]$.
Usando la parametrización de i)

$$z = e^{-2\theta} \Rightarrow z_i = 1 = e^{-2\theta_i} \Rightarrow \theta_i = 0$$

$$\textcircled{2} \quad \sigma_2: \begin{aligned} x &= R + \frac{R}{2} \sin \varphi, \quad \varphi \in [0, \pi] \\ y &= \frac{R}{2} - \frac{R}{2} \cos \varphi \\ z &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \frac{d\sigma_2}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{R}{2} \cos \varphi \\ \frac{R}{2} \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\| \frac{d\sigma_2}{dt} \right\| = \frac{R}{2}$$

$$\textcircled{3} \quad \sigma_3: \begin{aligned} x &= R \cos \theta \cos \bar{\varphi}, \quad \theta \in [0, \pi/2] \\ y &= R \cos \theta \sin \bar{\varphi} \\ z &= R \sin \theta \end{aligned} \quad \bar{\varphi} = 45^\circ = \pi/4 \Rightarrow \begin{aligned} x &= R \cos \theta \\ y &= R \cos \theta \\ z &= R \sin \theta \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma_3}{dt} = \begin{pmatrix} -R \sin \theta \\ -R \sin \theta \\ R \cos \theta \end{pmatrix} \Rightarrow \left\| \frac{d\sigma_3}{dt} \right\| = \sqrt{2R^2 \sin^2 \theta + R^2 \cos^2 \theta} = \sqrt{2} R$$

$$\textcircled{4} \quad \sigma_4: \begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 0 \\ z &= \sqrt{2}R - t \end{aligned} \quad t \in [0, \sqrt{2}R] \Rightarrow \frac{d\sigma_4}{dt} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\| \frac{d\sigma_4}{dt} \right\| = 1$$

Con esto, calculo la masa, sabiendo que $\rho(x, y, z) = (x+y)^2 + z^2$.

$$M = \int_V \rho \, dV = \int_0^R t^2 \cdot 1 \, dt + \int_0^\pi \left[R + \frac{R}{2} \sin \varphi + \frac{R}{2} - \frac{R}{2} \cos \varphi \right]^2 \frac{R}{2} \, d\varphi \\ + \int_0^{\pi/2} [2R^2 \cos^2 \theta + 2R^2 \sin^2 \theta] \cdot \sqrt{2} R \, d\theta + \int_0^{\sqrt{2}R} (\sqrt{2}R - t)^2 \cdot 1 \cdot dt$$

$$\Rightarrow M = \int_0^R t^2 \, dt + \int_0^\pi \left[\frac{3R}{2} + \frac{R}{2} [\sin \varphi - \cos \varphi] \right]^2 \frac{R}{2} \, d\varphi + \int_0^{\pi/2} (4R^2 \cos^2 \theta + 2R^2 \sin^2 \theta) \sqrt{2} R \, d\theta \\ + \int_0^{\sqrt{2}R} (2R^2 - 2\sqrt{2}Rt + t^2) \, dt$$

Usando que $\cos^2 \varphi = \frac{1 + \cos 2\varphi}{2}$; $\sin^2 \varphi = \frac{1 - \cos 2\varphi}{2}$

y otras ident. como $2 \sin \varphi \cos \varphi = \sin 2\varphi$, etc
para llegar a...

$$y \quad z_0 = e^{-2\theta_0} \Rightarrow \theta_0 = -\frac{\ln z_0}{2}$$

El trabajo desde $z=1$ a z_0 será

$$W_{z \rightarrow z_0} = \int_{\vec{\sigma}_i}^{\vec{\sigma}_0} \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = \int_0^{\frac{-\ln z_0}{2}} \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = g(\vec{\sigma}(\theta_0)) - g(\vec{\sigma}(0))$$

$$= g(e^{-\theta_0} \cos \theta_0, e^{-\theta_0} \sin \theta_0, e^{-2\theta_0}) - g(1, 0, 1)$$

$$\Rightarrow \boxed{W_{z \rightarrow z_0} = -e^{-3\theta_0} \cos \theta_0 (e^{-3\theta_0} \cos \theta_0 - e^{-\theta_0} \sin \theta_0 + e)}$$

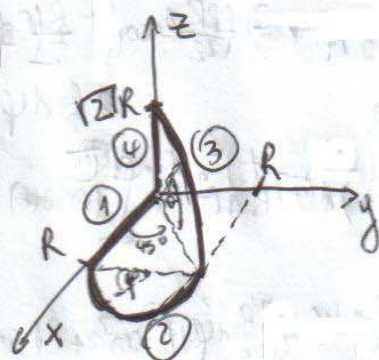
⑤ Para el trabajo hasta $z_0=0$, vemos el límite...

$$z_0 \rightarrow 0 \Rightarrow \theta_0 = -\frac{\ln z_0}{2} \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow e^{-3\theta_0} \cos \theta_0 (e^{-3\theta_0} \cos \theta_0 + e^{-\theta_0} \sin \theta_0) \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \boxed{W_{z \rightarrow 0} = +e}$$

P21



Necesitamos conocer la masa del "cable", y con esto, las coordenadas de $G = (x_G, y_G, z_G)$.

$$M = \int_{\vec{\sigma}} p d\ell = \sum_{i=1}^4 \int_{\vec{\sigma}_i} p d\ell_i = \sum_{i=1}^4 \int_{\vec{\sigma}_i} p \left\| \frac{d\vec{\sigma}_i(t)}{dt} \right\| dt$$

Describimos los 4 arcos que conforman el cable.

$$\textcircled{1} \quad \vec{\sigma}_1: x=t, \quad t \in [0, R]$$

$$y=0$$

$$z=0$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{\sigma}_1}{dt} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\| \frac{d\vec{\sigma}_1}{dt} \right\| = 1$$

(Importante, para no confundirse con signos, es que t sea creciente)

$$\Rightarrow M = \frac{R^3}{3} + \int_0^\pi \frac{R^3}{8} [9 + \sin^2\varphi - 2\sin\varphi\cos\varphi + \cos^2\varphi + (3\sin\varphi - 3\cos\varphi)] d\varphi$$

$$+ \int_0^{\pi/2} 2\sqrt{2}R^3 (1 + \cos^2\theta) + 2\sqrt{2}R^3 - 2\sqrt{2}R \frac{t^2}{2} \Big|_{\sqrt{2}R} + \frac{t^3}{3} \Big|_{\sqrt{2}R}$$

$$\Rightarrow M = \frac{R^3}{3} + \frac{R^3}{8} \int_0^\pi [10 - \sin^2\varphi + 3\sin\varphi - 3\cos\varphi] d\varphi + 2\sqrt{2}R^3 \int_0^{\pi/2} \left(\frac{3}{2} + \frac{\cos 2\theta}{2}\right) d\theta$$

$$+ \frac{2\sqrt{2}R^3}{3}$$

$$\Rightarrow M = \frac{R^3}{3} + \frac{R^3}{8} \left[10\pi - \int_0^\pi \sin^2\varphi d\varphi - 3\cos\varphi \Big|_0^\pi - 3\sin\varphi \Big|_0^\pi \right] + \frac{3\sqrt{2}R^3}{2}\pi + \sqrt{2}R^3 \int_0^{\pi/2} \cos 2\theta d\theta$$

$$+ \frac{2\sqrt{2}R^3}{3}$$

$$\Rightarrow M = \frac{R^3}{3} + \frac{5}{4}R^3\pi + \frac{R^3}{8} \left[\frac{\cos 2\varphi}{2} \right]_0^\pi + \frac{3R^3}{4} + \frac{3\sqrt{2}R^3}{2}\pi + \sqrt{2}R^3 \left[\frac{\sin 2\theta}{2} \right]_0^{\pi/2} + \frac{2\sqrt{2}R^3}{3}$$

Entonces, la masa de la curva es

$$M = \left[\frac{13}{12} + \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{5}{4}\pi + \frac{3\sqrt{2}}{2}\pi \right] R^3$$

Con la masa, podemos calcular (x_G, y_G, z_G) sabiendo que

$$x_G = \frac{\int x \cdot \rho(\vec{r}) \cdot dl}{M}, \quad \text{siendo } x_G = x_G \vee y_G \vee z_G$$

$$\text{y } \vec{r} = (x, y, z)$$

(Propuesto).

P3 Fórmulas de Frenet

$$\frac{d\hat{T}}{ds} = \kappa \hat{N} \quad / \quad \frac{d\hat{N}}{ds} = -\kappa \hat{T} + \tau \hat{B} \quad / \quad \frac{d\hat{B}}{ds} = -\tau \hat{N}$$

a) Sabemos que $\hat{N} = \frac{\frac{d\hat{T}}{ds}}{\left\| \frac{d\hat{T}}{ds} \right\|}$

(Usando un truco muy usado en mecánica, para el radio y la velocidad tangencial v_{tan})

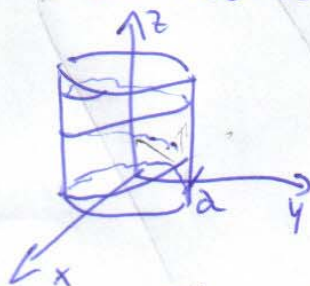
Tenemos que $\|\hat{T}\|^2 = 1 \quad / \frac{d}{ds}$

$$\Rightarrow \frac{d}{ds} (\|\hat{T}\|^2) = \frac{d}{ds} (\hat{T} \cdot \hat{T}) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d\hat{T}}{ds} \cdot \hat{T} + \hat{T} \cdot \frac{d\hat{T}}{ds} = 2\hat{T} \cdot \frac{d\hat{T}}{ds} = 0 \quad / \frac{1}{2\|\frac{d\hat{T}}{ds}\|}$$

$$\Rightarrow \hat{T} \cdot \frac{\frac{d\hat{T}}{ds}}{\|\frac{d\hat{T}}{ds}\|} = \hat{T} \cdot \hat{N} = 0 \Rightarrow \hat{T}, \hat{N} \text{ son ortogonales.}$$

Problema Extra (Frenet): Probar que el vector binormal de una hélice circular forma un ángulo constante con el eje del cilindro que contiene a la hélice



Sol) PDA $B \cdot \hat{k} = \text{cte}$

$$r(t) = (a \cos t, a \sin t, ct)$$

a : radio del cilindro

c : paso de la hélice

$$\Rightarrow \vec{T}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = (-a \sin t, a \cos t, c)$$

$$y \|\vec{T}\| = \sqrt{a^2 + c^2} \Rightarrow \hat{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + c^2}} (-a \sin t, a \cos t, c)$$

$$\Rightarrow \hat{T} \cdot \hat{k} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + c^2}} (-a \sin t, a \cos t, c) \cdot (0, 0, 1) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}} = \text{cte}$$

Por otra parte

$$\hat{N} = \frac{\hat{T}'}{\|\hat{T}'\|} \quad \hat{T}' = \frac{1}{\sqrt{a^2 + c^2}} (-a \cos t, -a \sin t, 0)$$

$$\Rightarrow \|\hat{T}'\| = \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}} \Rightarrow \hat{N} = (-\cos t, -\sin t, 0)$$

$$\text{Luego } \hat{T} \times \hat{N} = \hat{B} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + c^2}} \begin{pmatrix} -a \sin t & a \cos t & c \\ -a \cos t & -a \sin t & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + c^2}} (-c \sin t, -c \cos t, a)$$

$$\Rightarrow \hat{B} \cdot \hat{k} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}} = \text{cte.}$$